

2015 年度大学入試センター試験 解説〈数学 I A〉

第 1 問

$$y = -x^2 + 2x + 2$$

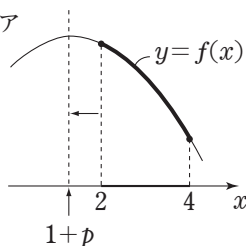
$$= -(x-1)^2 + 3 \quad \dots\dots ①$$

よって、このグラフの頂点の座標は、 $(\underline{1}, \underline{3})$  ……ア, イ

①のグラフを  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したグラフの頂点の座標は  $(1+p, 3+q)$  であるから、

$$f(x) = -\{x - (1+p)\}^2 + 3+q \quad \dots\dots ②$$

(1)  $2 \leq x \leq 4$  における  $f(x)$  の最大値 図ア  
 が  $f(2)$  になるのは、右の図アのように、



(頂点の  $x$  座標)  $\leq 2$

のときである。よって、

$$1+p \leq 2$$

$$p \leq \underline{1}$$

↑

$$(\dots ③)$$

$2 \leq x \leq 4$  における  $f(x)$  の最小値が  $f(2)$

になるのは、図イのように、

(頂点の  $x$  座標)  $\geq 3$

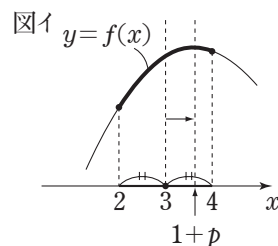
のときである。よって、

$$1+p \geq 3$$

$$p \geq \underline{2}$$

↑

$$(\dots ②)$$



……エ

……ウ

(2)  $f(x) > 0$  の解が  $-2 < x < 3$  になるのは、 $y = f(x)$  のグラフが図ウのようになるときである。

その条件は、

$$1+p = \frac{-2+3}{2} \quad \dots\dots ③ \quad \text{かつ} \quad f(3) = 0 \quad \dots\dots ④$$

である。

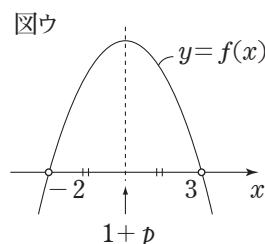
$$③ \text{より, } p = \underline{\underline{\frac{-1}{2}}}$$

……キク, ケ

$$\text{これと} ②, ④ \text{より, } -\left\{3 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 + 3 + q = 0$$

$$\text{よって, } q = \underline{\underline{\frac{13}{4}}}$$

……コサ, シ



## 第 2 問

[1]

(1) 「 $(p_1 \text{ かつ } p_2) \Rightarrow (q_1 \text{ かつ } q_2)$ 」の対偶は、

$$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)} \Rightarrow \overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)} \quad \dots\dots ①$$

ド・モルガンの法則より、

$$\overline{(q_1 \text{ かつ } q_2)} = (\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2}), \quad \overline{(p_1 \text{ かつ } p_2)} = (\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2})$$

であるから、①は、

$$\overline{(\overline{q_1} \text{ または } \overline{q_2})} \Rightarrow \overline{(\overline{p_1} \text{ または } \overline{p_2})}$$

よって、①

……ア

(2) 条件  $p_1, p_2, q_1, q_2$  を満たす 30 以下の自然数  $n$  の集合をそれぞれ  $A(p_1), A(p_2),$

$A(q_1), A(q_2)$  のように表すと、

$$A(p_1) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$A(p_2) = \{1, 3, 5, 9, 11, 15, 17, 21, 27, 29\}$$

$$A(q_1) = \{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$$

$$A(q_2) = \{5, 11, 17, 23, 29\}$$

このとき、

$$A((p_1 \text{ かつ } p_2)) = \{3, 5, 11, 17, 29\} \dots\dots ②$$

$$A((\overline{q_1} \text{ かつ } q_2)) = \{5, 11, 17, 23\} \dots\dots ③$$

よって、「②  $\Rightarrow$  ③」を満たさない  $n$  の値は、3 と 29

……イ, ウエ

(注)  $A(p_2)$  に “29” を入れ忘れない ( $n+2=31 > 30$  となる) ように注意が必要である。

[2]

右図アにおいて、余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \end{aligned}$$

よって、 $AC = \underline{7}$  ……オ

また、 $\sin \angle ABC = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ……カ、キ

さらに、正弦定理より、 $\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

よって、 $\sin \angle BCA = \frac{AB}{AC} \sin \angle ABC = \frac{3}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$  ……ク、ケ、コサ

次に、題意を満たすように点 D をとると、図イのようになる。P は BD 上の点である。

ここで、

$$\angle ABD = 60^\circ, AB : AD = 1 : \sqrt{3}$$

より、 $\angle ADB = 30^\circ$  である。

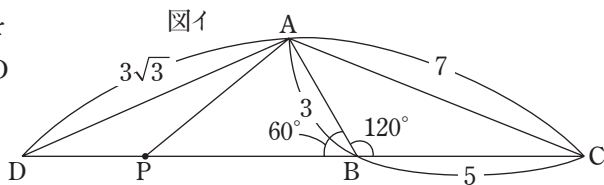
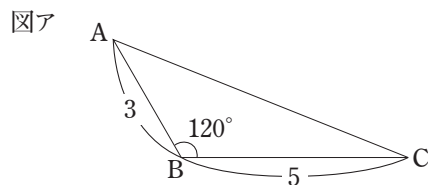
$\triangle APC$  で正弦定理より、 $2R = \frac{AC}{\sin \angle APC} = \frac{7}{\sin \angle APC}$

これより、 $R = \frac{7}{2 \sin \angle APC}$  ……①

ここで、図イより、 $30^\circ \leq \angle APC \leq 120^\circ$  であるから、 $\frac{1}{2} \leq \sin \angle APC \leq 1$

よって、①より、 $\frac{7}{2 \cdot 1} \leq R \leq \frac{7}{2 \cdot \frac{1}{2}}$

すなわち、 $\underline{\underline{\frac{7}{2}}} \leq R \leq \underline{\underline{7}}$  ……シ、ス、セ



## 第 3 問

[1]

与えられたヒストグラムから累積度数表を作ると、右のようになる。

階級	度数	累積度数
5 ~ 10	1	1
10 ~ 15	4	5
15 ~ 20	6	11
20 ~ 25	11	22
25 ~ 30	9	31
30 ~ 35	4	35
35 ~ 40	3	38
40 ~ 45	1	39
45 ~ 50	1	40

(1) 第 3 四分位数は、データの小さい方から 30 番目のデータと 31 番目のデータの平均であるから、右表より答えは、

④ の「25m 以上 30m 未満」 ……ア

(2) 第 1 四分位数は、データの小さい方から 10 番目のデータと 11 番目のデータ平均であるから、それは「15m 以上 20m 未満」の階級に含まれる。

また、中央値はデータの小さい方から 20 番目のデータと 21 番目のデータの平均であるから、それは「20m 以上 25m 未満」の階級に含まれる。

以上と (1) を満たす箱ひげ図は、①と④であるから、答えはそれ以外の、

①, ②, ③, ⑤ ……イ, ウ, エ, オ

(3) A の「どの生徒の記録も下がった」とき、第 1 四分位数が含まれる階級は上と同じか小さい階級になるから、a の図とは矛盾する。

C の「最初にとったデータで上位  $\frac{1}{3}$  に入るすべての生徒の記録が伸びた」とき、「45m 以上」に含まれるデータの個数は 1 以上になるから、c の図とは矛盾する。

よって答えは、①, ② ……カ, キ

[2]

(相関係数) =  $\frac{\text{(1 回目と 2 回目のデータの共分散)}}{\text{(1 回目の標準偏差)} \times \text{(2 回目の標準偏差)}}$  であるから、その値は、

$$\frac{54.30}{8.21 \times 6.98} = \frac{54.30}{57.3058} \quad \frac{54.30}{57.31} = 0.947\dots \text{より、答えは、} \underline{\text{⑦}} \quad \dots\dots\text{ク}$$

## 第4問

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

右図のように、正方形の板に記号をつける。

- (1) Aに塗る色は3通り、B～Eに塗る色は、それぞれの左隣りに塗った色以外の2通りずつあるから、塗り方は全部で、

$$3 \times 2^4 = \underline{48} \text{ (通り)} \quad \dots\dots \text{アイ}$$

- (2) A, B, Cに色を塗れば、左右対称となる塗り方は1つに決まる。

たとえば、A, B, Cを「赤, 緑, 赤」と塗れば、全体は「赤, 緑, 赤, 緑, 赤」と決まる。

よって、A, B, Cの塗り方の数が答えで、 $3 \times 2^2 = \underline{12}$  (通り) ……ウエ

- (3) 緑と青を交互に塗ることになるから、Aをどちらの色で塗るかを考えれば、答えは2通り。 ……オ

- (4) 赤で塗る3枚の正方形は、AとCとEに決まるから、BとDの塗り方を考えればよい。

BとDには緑と青のどちらを塗ってもよいから、答えは、 $2^2 = \underline{4}$  (通り) ……カ

- (5) 赤で塗る1枚の正方形がAである場合、B～Eには緑と青を交互に塗ることになるから、塗り方は2通り。赤で塗る1枚の正方形がEである場合も同様であるから、答えは、 $2 \times 2 = \underline{4}$  (通り) ……キ

赤で塗る1枚の正方形がBである場合、Aには緑か青を、C～Eには緑と青を交互に塗ることになるから、塗り方は、 $2 \times 2 = 4$  (通り)。赤で塗る1枚の正方形がDである場合も同様に4通り。

赤で塗る1枚の正方形がCである場合、AとB, CとDのそれぞれに青と緑を交互に塗ることになるから、塗り方は、 $2 \times 2 = 4$  (通り)。

よって、端以外の1枚を赤に塗る塗り方は、 $4 \times 2 + 4 = \underline{12}$  (通り) ……クケ

以上から、1枚の正方形を赤に塗る塗り方の合計は、 $4 + 12 = \underline{16}$  (通り) ……コサ

- (6) 赤で塗る正方形の枚数は、

- ①; 0枚, ②; 1枚, ③; 2枚, ④; 3枚

のいずれかである。

①, ②, ④の塗り方はそれぞれ2通り, 16通り, 4通りであり、塗り方は全部で48通りあるから、③の塗り方は、 $48 - (2 + 16 + 4) = \underline{26}$  (通り) ……シス

## 第5問

(1)  $a = 756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$  ……ア, イ, ウ

であるから, 756 の正の約数の個数は,

$$(2+1) \times (3+1) \times (1+1) = \underline{24} \text{ (個)} \quad \text{……エオ}$$

(2)  $\sqrt{am} = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 7 \times m}$  が自然数となるための条件は, 根号内の数が平方数となることである。よって,  $k$  を自然数として,

$$m = 3 \times 7 \times k^2 \quad \text{つまり, } m = 21k^2 \quad \text{……①}$$

と表すことができる。

このような最小の  $m$  は,  $k=1$  として,  $m = \underline{21}$  ……カキ

さらに,  $\sqrt{am} = \sqrt{2^2 \times 3^4 \times 7^2 \times k^2} = 2 \times 3^2 \times 7 \times k = \underline{126k}$  ……クケコ

(3) 1次不定方程式  $126k - 11\ell = 1$  ……②を解く。

$$126 = 11 \cdot 11 + 5 \text{ より, } 5 = 126 - 11 \cdot 11 \quad \text{……③}$$

$$11 = 5 \cdot 2 + 1 \text{ より, } 1 = 11 - 5 \cdot 2 \quad \text{……④}$$

③を④に代入すると,

$$1 = 11 - (126 - 11 \cdot 11) \cdot 2 = 11 - 126 \cdot 2 + 11 \cdot 22 = -126 \cdot 2 + 11 \cdot 23$$

よって,  $-126 \cdot 2 + 11 \cdot 23 = 1$  ……⑤

ここで, ②-⑤をつくと,

$$126(k+2) - 11(\ell+23) = 0$$

$$126(k+2) = 11(\ell+23) \quad \text{……⑥}$$

126 と 11 は互いに素であるから, ⑥より,  $n$  を整数として,

$$k+2 = 11n, \quad \ell+23 = 126n$$

$$k = 11n - 2, \quad \ell = 126n - 23$$

と表せる。

$k > 0$  となる最小の  $k$  の値は,  $n=1$  として,  $k = 11 \cdot 1 - 2 = \underline{9}$  ……サ

このとき,  $\ell = 126 \cdot 1 - 23 = \underline{103}$  ……シスセ

(4)  $\sqrt{am} = 126k$  を 11 で割ると 1 余るとき,  $\ell$  を整数として,

$$126k = 11\ell + 1$$

$$126k - 11\ell = 1$$

と表せるから, これは (3) で扱った 1 次不定方程式と同じである。

$|k|$  の最小値は,  $n=1$  のときの 9 であるから, 最小の自然数  $m$  は, ①において  $k=9$  として,

$$m = 21 \times 9^2 = \underline{1701} \quad \text{……ソタチツ}$$

